

CE-003: Estatística II - Turma K/O - Avaliações Semanais (2^o semestre 2013)

Semana 2

- Dois profissionais vão tentar resolver um problema e cada um deles pode ou não conseguir resolver. A chance do primeiro resolver é de 60% e do segundo 45%. Neste contexto responda às questões abaixo, fazendo suposições se necessário.
 - Por que este pode ser considerado um experimento aleatório?
 - Qual o espaço amostral?
 - Qual a probabilidade de que ambos resolvam o problema?
 - Qual a probabilidade de que o problema seja resolvido?
 - Foi necessária alguma suposição para resolver os itens anteriores? Se positivo, qual suposição?

Solução:

Notação:

$$A : \text{o primeiro resolve o problema} \quad P[A] = 0,60 \quad P[\bar{A}] = 0,40$$

$$B : \text{o segundo resolve o problema} \quad P[B] = 0,45 \quad P[\bar{B}] = 0,55$$

(a)

$$(b) \quad \Omega = \{(A, B), (A, \bar{B}), (\bar{A}, B), (\bar{A}, \bar{B})\}$$

$$(c) \quad \text{Supondo independência: } P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B] = 0,60 \cdot 0,45 = 0,27$$

$$(d) \quad \text{Supondo independência: } P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0,60 + 0,45 - 0,27 = 0,78$$

(e) Independência entre os profissionais, ou seja, a probabilidade de cada um resolver independe do problema ser ou não resolvido pelo outro.

-
- (adaptado de M. & L., 2002) Em um levantamento de dados de acidentes em uma estrada foram resumidos na tabela a seguir. A partir desses dados, responda às questões propostas.

Motorista	Vítimas fatais	
	Sim	Não
Sóbrio	1228	275
Alcoolizado	2393	762

- Voce diria que o fato do motorista estar ou não alcoolizado afeta a chance de ocorrer vítimas fatais? Justifique.
- Obtenha a partir da tabela acima: (a) alguma probabilidade marginal, (b) alguma probabilidade condicional, (c) alguma probabilidade de interseção de eventos.
- Cite um par de eventos mutuamente exclusivos.
- Se um motorista alcoolizado se envolve em um acidente, qual a probabilidade de haver vítima fatal?
- Se houve uma vítima fatal em um acidente, qual a probabilidade do motorista estar alcoolizado?

Notação:

S : motorista sóbrio

$A \equiv \bar{S}$: motorista alcoolizado

F : acidente com vítima fatal

$NF \equiv \bar{F}$: acidente sem vítima fatal

Solução:

- (a) Concluir comparando as proporções (probabilidades) de vítima fatal entre sóbrios e alcoolizados, ou seja as probabilidades condicionais $P[F|S]$ e $P[F|A]$, que são dadas por:

$$\begin{array}{cc} S & A \\ 0.8170 & 0.7585 \end{array}$$

- (b) i. Probabilidades marginais:

$$P[A] = \frac{3155}{4658} = 0.677 \quad ; \quad P[S] = P[\bar{A}] = \frac{1503}{4658} = 0.677$$

$$P[A] = \frac{3621}{4658} = 0.777 \quad ; \quad P[S] = P[\bar{A}] = \frac{1037}{4658} = 0.223$$

- ii. Probabilidades conjuntas (interseção):

$$P[A \cap F] = \frac{2393}{4658} = 0.514 \quad ; \quad P[S \cap F] = \frac{1228}{4658} = 0.264$$

$$P[A \cap NF] = \frac{762}{4658} = 0.164 \quad ; \quad P[S \cap NF] = \frac{275}{4658} = 0.059$$

- iii. Probabilidades condicionais: $P[A|F]$, $P[S|F]$, $P[F|A]$, $P[NF|A]$

$$P[A|F] = \frac{2393}{3621} = 0.661 \quad ; \quad P[S|F] = P[\bar{A}] = \frac{1228}{3621} = 0.339$$

$$P[A|NF] = \frac{762}{1037} = 0.735 \quad ; \quad P[S|NF] = P[\bar{A}] = \frac{275}{1037} = 0.265$$

$$P[F|A] = \frac{2393}{3155} = 0.758 \quad ; \quad P[NF|A] = P[\bar{A}] = \frac{762}{3155} = 0.242$$

$$P[F|S] = \frac{1228}{1503} = 0.817 \quad ; \quad P[NF|S] = P[\bar{A}] = \frac{275}{1503} = 0.183$$

- (c) Pares de eventos mutuamente exclusivos: F e NF

- com vítima fatal e sem vítima fatal (F e NF)
- sóbrio e alcoolizado (S e A)

(d) $P[F|A] = \frac{P[F \cap A]}{P[A]} = \frac{2393}{2393+762} = 0.661$

(e) $P[A|F] = \frac{P[A \cap F]}{P[F]} = \frac{2393}{1228+2393} = 0.758$

Semana 3

1. Um instituto que faz previsões meteorológicas fez uma avaliação de suas previsões de 48 horas para finais de semana feitas por um particular modelo de previsão. Foi verificado que a previsão indicava chuva em 80% dos dias que de fato choveu e previa não chuva em 92% dos dias em que não choveu. Verificou-se ainda que chove em 12% dos períodos.
- (a) Escreva em notação de probabilidades adequada as informações dadas no problema.
- (b) Qual a probabilidade (proporção) de previsão de chuva?
- (c) Qual a probabilidade de chover quando há uma previsão de chuva?
- (d) Qual a probabilidade de obter uma previsão incorreta?
- (e) Supondo os mesmos percentuais de acertos de previsão, qual seria a probabilidade de acerto de uma previsão de chuva em outra região em que chove em apenas 5% dos períodos?

Solução:

Notação:

A : previsão de chuva na região

\bar{A} : previsão de chuva

C : chove no período

\bar{C} : não chove no período

(a)

$$\begin{aligned}P[C] &= 0,12 & P[\bar{C}] &= 0,88 \\P[A|C] &= 0,80 & P[\bar{A}|C] &= 0,20 \\P[\bar{A}|\bar{C}] &= 0,92 & P[A|\bar{C}] &= 0,08\end{aligned}$$

(b) $P[A] = P[A \cap C] + P[A \cap \bar{C}] = P[A|C] \cdot P[C] + P[A|\bar{C}] \cdot P[\bar{C}] = (0,80)(0,12) + (0,08)(0,88) = 0.166$

(c) $P[C|A] = \frac{P[C \cap A]}{P[A]} = \frac{P[A|C] \cdot P[C]}{P[A]} = \frac{(0,80)(0,12)}{0.166} = 0.577$

(d) $P[C|\bar{A}] + P[\bar{C}|\bar{A}] = \frac{P[C \cap \bar{A}]}{P[\bar{A}]} + \frac{P[\bar{C} \cap \bar{A}]}{P[\bar{A}]} = \frac{P[\bar{A}|C] \cdot P[C]}{P[\bar{A}]} + \frac{P[\bar{A}|\bar{C}] \cdot P[\bar{C}]}{P[\bar{A}]} = \frac{(0,20)(0,12)}{0.834} + \frac{(0,08)(0,88)}{0.166} = 0.452$

(e) Nesse caso:

$$P[C] = 0,05 \quad P[\bar{C}] = 0,95$$

e recalculando temos:

$$P[A] = P[A \cap C] + P[A \cap \bar{C}] = P[A|C] \cdot P[C] + P[A|\bar{C}] \cdot P[\bar{C}] = (0,80)(0,05) + (0,08)(0,95) = 0.116.$$

A probabilidade de acertar uma previsão de chuva fica:

$$P[C|A] = \frac{P[C \cap A]}{P[A]} = \frac{P[A|C] \cdot P[C]}{P[A]} = \frac{(0,80)(0,05)}{0.116} = 0.345$$

Semana 4

1. Em um teste com quatro questões de múltipla escolha, cada questão possui cinco alternativas com apenas uma delas correta. Estamos interessados na situação de "acerto casual", na qual a resposta de cada questão é escolhida ao acaso, supondo que todas as questões são respondidas.

- (a) Defina a v.a. de interesse.
- (b) Obtenha a função de probabilidades.
- (c) Obtenha a função de distribuição (acumulada).
- (d) Obtenha o valor esperado da v.a.

Suponha agora que para cada acerto ganha-se dois pontos e perde-se um ponto para cada erro.

(e) Sob as mesmas condições, obtenha a distribuição de probabilidades do número de pontos ganhos.

Solução:

(a) X : número de acertos

x	0	1	2	3	4
(b) $P[X = x]$	$(4/5)^4 =$ $= 0.4096$	$4(1/5)^1(4/5)^3 =$ $= 0.4096$	$6(1/5)^2(4/5)^2 =$ $= 0.1536$	$4(1/5)^3(4/5)^1 =$ $= 0.0256$	$(1/5)^4 =$ $= 0.0016$

x	0	1	2	3	4
(c) $F(x) = P[X \leq x]$	0.4096	0.8192	0.9728	0.9984	1

(d) $E[X] = \sum_{i=1}^4 x_i P[X = x_i] = 0,8$

(e) Y : pontos obtidos. Y é uma transformação 1-1 de X e portanto $P[Y = y_i] = P[X = x_i]$.

x	0	1	2	3	4
y	-4	-1	2	5	8
$P[Y = y]$	0.4096	0.4096	0.1536	0.0256	0.0016

Solução alternativa: usar o fato que $X \sim B(n = 4, p = 1/5)$

2. Seja X uma v.a. com função de distribuição de probabilidades dada por:

$$f(x) = \begin{cases} cx & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- (a) Obtenha o valor de c .
- (b) Calcule $P[X > 2]$
- (c) Calcule $P[1, 2 < X < 3, 5]$
- (d) Calcule $P[X < 3|X > 1, 5]$
- (e) Obtenha a $E[X]$
- (f) Obtenha k tal que $P[X > k] = 0,5$

Solução:

(a)

$$\int_0^4 cx \, dx = 1$$

$$c = 1/8$$

(b) $P[X > 2] = \int_2^4 x/8 \, dx = 0,75$

(c) Calcule $P[1, 2 < X < 3, 5] \int_2^4 x/8 \, dx = 0.6756$

(d) Calcule $P[X < 3|X > 1, 5] = \frac{P[1,5 < X < 3]}{P[X > 1,5]} = 0.4909$

(e) $E[X] = \int_0^4 x \cdot x/8 \, dx = (1/8)4^3/3 = 8/3 = 2,67$

(f)

$$\int_0^k x/8 \, dx = 0.5$$

$$(1/8)k^2/2 = 0,5$$

$$k = \sqrt{8}$$

Semana 5

1. Suponha que a posição na qual ocorre um dano em um disco pode ser considerada uma variável uniforme com valores entre 0 e 100 (valores percentuais em relação a capacidade total do disco). Defina-se ainda que a porção inicial do disco corresponde aos 15% iniciais, a porção intermediária entre 15 e 80% e a porção nos restantes 20%.

- (a) Defina a v.a. de interesse, a função de densidade de probabilidades e a função de distribuição (acumulada).
- (b) Obtenha a probabilidade do dano ocorrer na porção inicial do disco.
- (c) Obtenha a probabilidade do dano ocorrer na porção final do disco, sabendo que não ocorreu na inicial.
- (d) Obtenha a probabilidade do dano ocorrer na porção inicial ou final do disco.
- (e) Defina uma nova variável dada pela porção do disco onde ocorre a falha e monte a sua distribuição de probabilidades.

Considere agora que serão examinados cinco discos com dano e estamos interessados no número de discos que apresenta dano na porção inicial.

- (f) Defina a v.a. de interesse, identifique o seu *tipo* e obtenha a distribuição de probabilidades.
- (g) Calcule a probabilidade de obter no máximo um dos discos com dano na porção inicial.
- (h) Se forem examinados 100 lotes de cinco discos, qual deve ser o número médio de discos por lote SEM dano na porção inicial?

Solução:

(a)

X : número de acertos

$$f(x) = \frac{1}{100 - 0} = \frac{1}{100}$$

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx = \frac{1}{100} x \Big|_0^x = \frac{x - 0}{100 - 0} = \frac{x}{100}$$

(b)

$$P[0 < X < 15] = \int_0^{15} f(x) dx = \frac{1}{100} x \Big|_0^{15} = \frac{1}{100} (15 - 0) = 0,15$$

ou

$$P[0 < X < 15] = F(15) = \frac{15}{100} = 0,15$$

(c)

$$P[80 < X < 100 | X > 15] = \frac{P[80 < X < 100 \cap X > 15]}{P[X > 15]} = \frac{P[80 < X < 100]}{P[X > 15]} = \frac{\int_{80}^{100} f(x) dx}{\int_{15}^{100} f(x) dx} = \frac{20/100}{85/100} = 0.235$$

ou

$$P[80 < X < 100 | X > 15] = \frac{1 - F(80)}{1 - F(15)} = 0.235$$

(d)

$$P[X < 15 \cup X > 80] = P[X < 15] + P[X > 80] = \frac{15}{100} + \frac{20}{100} = 0,35$$

ou

$$P[X < 15 \cup X > 80] = F(15) + (1 - F(80)) = \frac{15}{100} + (1 - \frac{80}{100}) = 0,35$$

(e)

Y : porção do disco onde ocorre dano

y	inicial	intermediária	final
$P[Y=y]$	0,15	0,65	0,20

(f)

Z : número de discos com dano entre cinco discos na porção inicial

$$Z \sim B(n = 5, p = 0,15)$$

$$P[Z = z] = \binom{5}{z} (0,15)^z (1 - 0,15)^{5-z}$$

(g) $P[Z \leq 1] = P[Z = 0] + P[Z = 1] = \binom{5}{0} (0,15)^0 (1 - 0,15)^{5-0} + \binom{5}{1} (0,15)^1 (1 - 0,15)^{5-1} = 0.444 + 0.392 = 0.835$

(h) $E[5 - X] = 5 - E[X] = 5 - n \cdot p = 5 - 5 \cdot (0,15) = 4,25$

Semana 6

1. Considere que um grande grupo (I) de pessoas vai fazer uma determinada prova. Supõe-se que as *notas* seguem uma distribuição normal de média 450 e variância 144. Chama-se de *escores* ($Z = (X - \mu)/\sigma$) as notas padronizadas para uma distribuição normal padrão (média zero e variância unitária)

(a) Qual a proporção esperada de candidatos com nota superior a 470?

(b) Qual a proporção esperada de candidatos com notas entre 430 e 460?

(c) Qual a proporção esperada de candidatos que se distanciem mais do que 1,5 desvios padrões da média?

- (d) Se forem classificados para uma próxima etapa 20% dos candidatos com as maiores notas, qual será a nota de corte para classificação para próxima etapa.
- (e) Se dividirmos os candidatos em três faixas: A : os 60% com menores notas, B : 30% de notas intermediárias e C : 10% com as maiores notas. Quais os escores que definem os grupos?
- (f) Quais valores correspondem aos quartis da distribuição das notas?
- (g) São considerados candidatos excepcionais aqueles com escore acima de 2,5. A qual nota corresponde tal escore?

Um outro grupo (II) fez uma prova equivalente em um outro dia. Para este outro grupo a média foi de 462 e a variância de 81. Os candidatos dos dois grupos serão classificados usando os escores.

- (h) Entre um candidato do grupo I com nota 470 e um do grupo II com nota 485, qual estaria melhor classificado?
- (i) Quais seriam as notas para classificar os candidatos do grupo II nas faixas A , B e C ?
- (j) Se fosse adotada uma única nota de corte de 475, qual seria o percentual de classificados de cada grupo?

Solução:

$$\begin{array}{ll}
 X : \text{nota no grupo I} & X \sim N(450, 12) \\
 Z = \frac{X - 450}{12} : \text{escore} & Z \sim N(0, 1) \\
 Y : \text{nota no grupo II} & Y \sim N(462, 9)
 \end{array}$$

- (a) $P[X > 470] = P[Z > \frac{470-450}{12}] = P[Z > 1.667] = 0.0478$
- (b) $P[430 < X < 460] = P[\frac{430-450}{12} < Z < \frac{460-450}{12}] = P[-1.667 < Z < 0.8333] = 0.75$
- (c) $P[|Z| > 1,5] = P[Z < -1,5] + P[Z > 1,5] = 0.134$
- (d)

$$\begin{aligned}
 P[X > x_D] &= 0,20 \\
 z &= 0.8416 \\
 z &= \frac{x_D - 450}{12} \\
 x_D &= 460.1
 \end{aligned}$$

- (e)

$$\begin{aligned}
 P[Z < z_1] &= 0,60 \longrightarrow z_1 = 0.2533 \quad (x_1 = 453) \\
 P[Z < z_2] &= 0,90 \longrightarrow z_2 = 1.282 \quad (x_2 = 465.4)
 \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} Q_1 : \\ P[X < Q_1] &= 0,25 \\ z_1 &= -0.6745 \\ z_1 &= \frac{Q_1 - 450}{12} \\ Q_1 &= 441.9 \\ Q_2 : \\ P[X < Q_2] &= 0,50 \\ Q_2 &= 450 \\ Q_3 : \\ P[X < Q_3] &= 0,75 \\ z_3 &= 0.6745 \\ z_3 &= \frac{Q_3 - 450}{12} \\ Q_3 &= 458.1 \end{aligned}$$

(g) $z = \frac{x_G - 450}{12} = 2,5 \rightarrow x_G = 480$

(h)

$$\begin{aligned} z_I &= \frac{470 - 450}{12} = 1.67 \\ z_{II} &= \frac{482 - 462}{9} = 2.56 \end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned} P[Z < z_1] &= 0,60 \rightarrow z_1 = 0.2533 \quad (y_1 = 464.3) \\ P[Z < z_2] &= 0,90 \rightarrow 1.282 \quad (y_2 = 473.5) \end{aligned}$$

(j)

$$\begin{aligned} \text{Grupo I : } P[X > 475] &= P[Z > \frac{475 - 450}{12}] = P[X > 2.083] = 0.0186 \\ \text{Grupo II : } P[X > 475] &= P[Z > \frac{475 - 462}{9}] = P[X > 1.444] = 0.0743 \end{aligned}$$
