

CE-003: Estatística II - Turma AMB/K/O
Avaliações Semanais (1º semestre 2014)

Semana 3

1. Dois jogadores (A e B) vão jogar um jogo que consiste no lançamento de dois dados. Ambos começam com R\$ 10,00. Se a soma dos dados for um número ímpar, A paga R\$ 1,00 para B . Se a soma for par, B paga R\$ 1,00 para A .
 - (a) Quais os possíveis valores em dinheiro que os jogadores podem ter após 2 rodadas? A chance é a mesma para todos esses possíveis valores?
 - (b) Quais os possíveis valores em dinheiro que os jogadores podem ter após 3 rodadas? A chance é a mesma para todos esses possíveis valores?
 - (c) O jogo é honesto?

Solução:

No lançamento de dos dados existem 36 resultados possíveis $((1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6))$ todos com a mesma probabilidade de ocorrência. As possíveis somas e respectivas probabilidades são:

$S(\text{soma})$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P[S = s]$	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

O que resulta nas probabilidades de par e ímpar:

$S(\text{soma})$	par	ímpar
$P[S = s]$	$\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$	$\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

- (a) Denotando por A e B as vitórias de cada um destes jogadores os possíveis resultados são:

$$\Omega = (A, A), (A, B), (B, A), (B, B)$$

e como $P[A] = P[\text{par}] = P[\text{ímpar}] = P[B] = 1/2$, cada um dos possíveis resultados em Ω possui probabilidade $1/2$. Denotando por X_A o saldo de A após duas rodadas (lembrando que $X_B = 20 - X_A$), temos que os possíveis valores e suas probabilidades após duas rodadas são:

x_A	8	10	12
$P[X_A = x_A]$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

- (b) De forma análoga à anterior, os possíveis resultados são:

$$\Omega = (A, A, A), (A, A, B), (A, B, A), (B, A, A), (A, B, B), (B, A, B), (B, B, A), (B, B, B)$$

e cada ponto do espaço amostral possui probabilidade $1/8$. Os possíveis valores de X_A e suas probabilidades após duas rodadas são:

x_A	7	9	11	13
$P[X_A = x_A]$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

- (c) Sim, a probabilidade de *par* é igual a de *mpar* o que resultou em probabilidades iguais para os ganhos possíveis dos jogadores.

As probabilidades poderiam ser ainda obtidas definindo-se:

$$\begin{aligned} Y_B & \text{ número de vitórias de B} \\ y_B & \in \{0, 1, 2, 3\} \\ Y_B & \sim \text{Bin}(n, p = 1/2) \quad \text{em que } n = 2 \text{ ou } 3 \text{ é o número de rodadas} \\ P[Y_B = y_B] & = \binom{n}{y_B} p^{y_B} (1-p)^{n-y_B} \end{aligned}$$

2. A cada rodada de um experimento sobre funções cognitivas, o animal recebe um estímulo e depois faz uma escolha entre duas opções, sendo que em uma deles ele recebe um “prêmio” e em outra não. O interesse está no resultados dos “acertos” do animal (ou seja se ele recebe ou não o “prêmio”). Considere três rodadas deste experimento.

- Qual o espaço amostral do experimento?
- Qual a probabilidade associada a cada ponto do espaço amostral?
- Qual(ais) as suposições feitas para calcular estas probabilidades?
- Qual a probabilidade do animal receber algum “prêmio” durante as três rodadas?
- Defina algum evento simples e algum evento composto e forneça as probabilidades destes eventos.

Solução:

Notação:

$$A : \text{ o animal recebe o prêmio} \quad P[A] = 0,50 \quad P[\bar{A}] = 0,50$$

- $\Omega = \{(A, A, A), (A, A, \bar{A}), (A, \bar{A}, A), (\bar{A}, A, A), (A, \bar{A}, \bar{A}), (\bar{A}, A, \bar{A}), (\bar{A}, \bar{A}, A), (\bar{A}, \bar{A}, \bar{A})\}$
- todos tem a mesma probabilidade, $P[(A, A, A)] = P[(A, A, \bar{A})] = \dots = P[(\bar{A}, \bar{A}, \bar{A})] = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$
- Os resultados das três rodadas são independentes, a probabilidade de prêmio permanece constante e igual a 1/2 em cada rodada.
- $P[\text{algum prêmio}] = 1 - P[\text{nenhum prêmio}] = 1 - P[(\bar{A}, \bar{A}, \bar{A})] = 1 - 1/8 = 7/8$
- Há várias possibilidades, o que se seguem são apenas possíveis opções:

E_1 (evento simples) : o animal recebe prêmio em todas as tentativas

$$P[E_1] = \frac{1}{8}$$

E_2 (evento simples) : o animal recebe prêmio em duas tentativas

$$P[E_2] = P[(A, A, \bar{A})] + P[(A, \bar{A}, A)] + P[(\bar{A}, A, A)] = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Semana 4

- Considere que um componente de um sistema de reconhecimento é composto de um código de três algarismos que podem ser fornecidos em qualquer ordem. O reconhecimento é positivo se ao menos dois algarismos corretos são fornecidos. Considere que são feitas tentativas aleatórias, sendo que cada tentativa consiste em fornecer três algarismos (de 0 a 9).
 - Qual a probabilidade do reconhecimento ser positivo em uma tentativa qualquer?
 - Qual a probabilidade de conseguir reconhecimento positivo em duas tentativas consecutivas?
 - Qual a probabilidade de conseguir reconhecimento positivo em exatamente duas entre 10 tentativas?
 - Se são feitas tentativas até conseguir o primeiro reconhecimento positivo, qual a probabilidade de que sejam necessárias mais do que quatro tentativas?
 - Voce consegue identificar distribuições de probabilidades discretas discutidas em aula os itens anteriores? Qual(ais)?

Solução:

O problema pode ser resolvido diretamente utilizando distribuições de probabilidades “conhecidas”, mas vamos aqui detalhar a solução.

Denotando por C : *algarismo correto é fornecido* e \bar{C} : *algarismo incorreto é fornecido*, o espaço amostral do experimento definido por uma tentativa é:

$$\Omega = \{(\bar{C}, \bar{C}, \bar{C}), (\bar{C}, \bar{C}, C), (\bar{C}, C, \bar{C}), (C, \bar{C}, \bar{C}), (\bar{C}, C, C), (C, \bar{C}, C), (C, C, \bar{C}), (C, C, C)\}.$$

As probabilidades associadas a cada ponto podem ser obtidas considerando que $P[C] = 0,1$ e independência. Desta forma $P[(\bar{C}, \bar{C}, C)] = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,1$ e de forma análoga para demais.

(a) E_1 : reconhecimento ser positivo em uma tentativa

$$pR = P[E_1] = P[(C, C, \bar{C})] + P[(C, \bar{C}, C)] + P[(\bar{C}, C, C)] + P[(C, C, C)] = 3 \cdot (0,1)^2(0,9) + (0,1)^3 = 0.028$$

(b)

$$P[E_1 \cap E_1] \stackrel{ind}{=} 0.01^2 = 0.000784$$

(c) E_3 : reconhecimento positivo em exatamente duas entre 10 tentativas

$$P[E_3] = \binom{10}{2} (pR)^2 (1 - pR)^{10-2} = 0.02811$$

(d) E_4 : mais do que quatro tentativas até primeiro reconhecimento positivo.

$$P[E_3] = 1 - P[\bar{E}_3] = 1 - (pR + (1 - pR)pR + (1 - pR)^2 pR + (1 - pR)^3 pR) = 0.89262$$

(e) Distribuição Binomial para (i) número de algarismos corretos (ii) número de tentativas positivas. Distribuição Geométrica para número de tentativas até o primeiro reconhecimento.

Utilizando distribuições de probabilidades “conhecidas” teríamos as soluções apresentadas a seguir. Definindo as variáveis aleatórias:

X_1 : número de algarismos corretos em uma tentativa	$X_1 \sim B(n = 3, p = 1/10)$
X_2 : número de tentativas corretas em 2 tentativas	$X_2 \sim B(n = 2, p = P[X_1 \geq 2])$
X_3 : número de tentativas corretas em 10 tentativas	$X_3 \sim B(n = 2, p = P[X_1 \geq 2])$
X_4 : número de não reconhecimentos até o primeiro positivo	$X_4 \sim G(p = P[X_1 \geq 2])$

E os itens anteriores seriam respondidos como:

(a) $P[X_1 \geq 2] = P[X_1 = 2] + P[X_1 = 3] = 0.027 + 0.001 = 0.028$

(b) $P[X_2 = 2] = 0.000784$

(c) $P[X_3 = 2] = 0.02811$

(d) $P[X_4 \geq 4] = 1 - P[X \leq 3] = 1 - 0.10738 = 0.89262$

Semana 5

1. Considere um estudo de padrões em texto no qual a ocorrência de algumas “expressões chave” é verificada. Responda cada um dos itens abaixo, identificando a variável aleatória envolvida e a respectiva distribuição de probabilidades.

(a) Sabe-se que uma certa expressão E_1 ocorre em média 1,4 vezes por página. Qual a probabilidade de tal expressão

i. não ser encontrada em uma determinada página?

ii. ocorrer ao menos três vezes em duas páginas?

(b) Uma outra expressão E_2 ocorre em 10% das páginas. Qual a probabilidade de:

i. não ser encontrada em cinco páginas escolhidas ao acaso?

ii. ser encontrada em ao menos uma de cinco páginas escolhidas ao acaso?

- (c) Adota-se a estratégia de inspecionar páginas uma a uma até encontrar a primeira ocorrência da expressão E_2 .
- Quantas páginas sem a ocorrência de E_2 espera-se encontrar?
 - Qual a probabilidade de serem encontradas mais que cinco páginas sem a ocorrência de E_2
- (d) Em um texto completo de 80 páginas sabe-se que 30 apresentam algum erro no uso de expressões investigadas e as demais páginas não apresentam nenhum erro.
- Sendo escolhidas dez páginas do texto ao acaso, qual a probabilidade de que nenhuma delas contenha erro no uso das expressões?
 - Idem anterior para 15 páginas de texto.
- (e) As páginas do texto serão inspecionadas até que se encontre a terceira página com algum erro.
- Qual a probabilidade de que sejam “varridas” pelo menos dez páginas?
 - Quantas páginas espera-se inspecionar antes de encontrar a terceira com erro?
 - Qual seria a probabilidade “de algo oposto”, de ser necessário varrer mais de cinco páginas até que se encontre a terceira sem erro algum?

Solução:

(a)

X : número de ocorrências de E_1 em uma página

$$X \sim P(\lambda = 1, 4)$$

$$P[X = x] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

i. $P[X = 0] = \frac{e^{-1,4} 1,4^0}{0!} = 0.247$

ii.

X : número de ocorrências de E_1 em duas página

$$X \sim P(\lambda = 2, 8)$$

$$P[X \geq 1] = 1 - (P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2]) = 0.167$$

(b)

X : número de páginas em que E_2 ocorre dentre cinco páginas

$$X \sim B(n = 5, p = 0, 10)$$

$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

i. $P[X = 0] = \binom{5}{0} (0, 1)^0 (1 - 0, 1)^{5-0} = 0.59$

ii. $P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 0.41$

(c)

X : número de páginas inspecionadas sem encontrar a ocorrência de E_2 , antes de encontrar a primeira

$$X \sim G(p = 0, 10)$$

$$P[X = x] = (1 - p)^x p$$

i. $E[X] = \frac{1-p}{p} = \frac{1-0,1}{0,1} = 9$

ii. $P[X > 5] = 1 - P[X \leq 5] = 0.531$

(d)

X : número de página com erros em n páginas de texto verificadas

$$X \sim HG(N = 80, K = 30, n)$$

$$P[X = x] = \frac{\binom{K}{x} \binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$\text{i. } P[X = 0 | n = 10] = \frac{\binom{30}{0} \binom{80-30}{10-0}}{\binom{80}{10}} = 0.00624$$

$$\text{ii. } P[X = 0 | n = 15] = \frac{\binom{30}{0} \binom{80-30}{15-0}}{\binom{80}{15}} = 0.000339$$

(e) As páginas do texto serão inspecionadas até que se encontre a terceira página com algum erro.

X : número de páginas inspecionadas sem encontrar a ocorrência de E_2 , antes de encontrar a terceira

$$X \sim \text{BN}(r = 3, p = 0, 10)$$

$$P[X = x] = \binom{x+r-1}{x} p^r (1-p)^x$$

$$\text{i. } P[X + 3 \geq 10] = P[X \geq 7] = 0.93$$

$$\text{ii. } E[X] = \frac{r(1-p)}{p} = \frac{3(1-0,1)}{0,1} = 27$$

iii.

X : número de páginas inspecionadas com encontrar a ocorrência de E_2 , antes de encontrar a terceira

$$X \sim \text{BN}(r = 3, p = 0, 90)$$

$$P[X > 5] = 1 - P[X \leq 4] = 0.000176$$

Semana 6

1. Considera-se que o número semanal de acidentes em uma certa rodovia segue uma distribuição de Poisson com média de 4,2.
 - (a) Qual a probabilidade de que em uma determinada semana ocorram menos que três acidentes?
 - (b) Indique como seria calculada a probabilidade de ocorrência de 10 ou mais acidentes.
 - (c) Qual a probabilidade de que não ocorra acidentes em um único dia tomado ao acaso?
 - (d) Qual seria a distribuição de probabilidades do número de acidentes por mês?
 - (e) Qual a probabilidade de que, em quatro semanas, no máximo em uma delas ocorram três ou mais acidentes?

Solução:

X : número semanal de acidentes

$$X \sim P(\lambda = 4, 2)$$

$$P[X = x] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = \frac{e^{-4,2} 4,2^x}{x!}$$

$$\text{(a) } P[X \leq 3] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] = 0.21$$

$$\text{(b) } P[X \geq 10] = 1 - P[X \leq 9] = 1 - (P[X = 0] + P[X = 1] + \dots + P[X = 9]) = 0.0111$$

(c)

X_D : número acidentes em 1 dia

$$X_D \sim P(\lambda = 4, 2/7)$$

$$P[X_D = 0] = \frac{e^{-4,2/7} (4, 2/7)^0}{0!} = e^{-4,2/7} = 0.549$$

(d) Considerando o mês com 30 dias:

X_M : número acidentes por mês

$$X_M \sim P(\lambda = 30 \cdot 4, 2/7 = 18)$$

(e)

Y : número semanas, dentre 4 semanas, em que ocorrem 3 ou mais acidentes

$$Y \sim B(n = 4, p = P[X \geq 3]) = 0.79$$

$$P[Y = y] = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-y} = \binom{4}{x} 0.79^x (1 - 0.79)^{4-y} P[Y \leq 1] = P[Y = 0] + P[Y = 1] = 0.0313$$

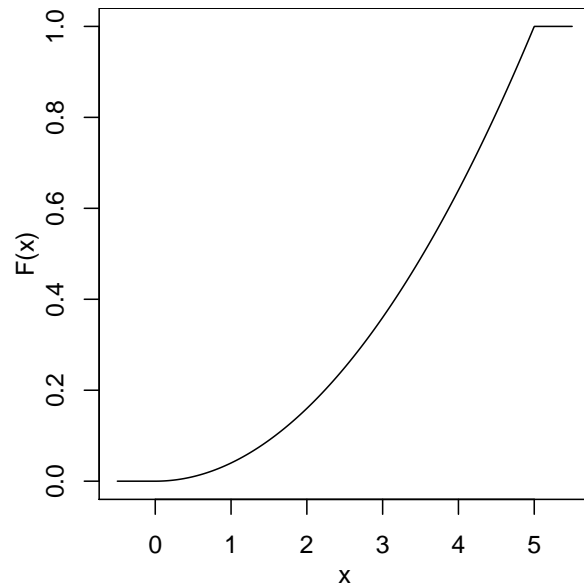
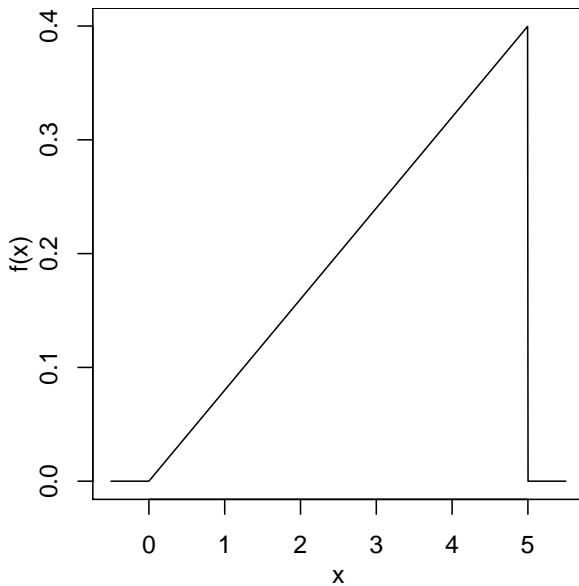
2. A função de densidade de probabilidades de uma variável aleatória X é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{se } 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{para qualquer outro valor} \end{cases}$$

encontre:

- k ,
- $P[1 \leq X \leq 3]$,
- $P[2 \leq X \leq 4]$,
- $P[X \geq 3]$,
- $P[X \leq 3 | X > 1]$,
- A expressão da função de densidade acumulada $F(x)$ e mostre como as probabilidades dos itens anteriores poderiam ser calculadas em função de $F(x)$,
- a média da variável X ,
- os quartis (incluindo a mediana).

Solução:



(a)

$$Kx \geq 0, 0 \leq x \leq 5 \Rightarrow K > 0$$

$$\int_0^5 kx dx = 1 \Rightarrow k \frac{5^2 - 0^2}{2} = 1 \Rightarrow K = 2/25 = 0,08$$

$$(b) P[1 \leq X \leq 3] = \int_1^3 0,08x dx = 0,08 \frac{3^2 - 1^2}{2} = 0.32$$

$$(c) P[2 \leq X \leq 4] = \int_2^4 0,08x dx = 0,08 \frac{4^2 - 2^2}{2} = 0.48$$

$$(d) P[X \geq 3] = \int_3^5 0,08x dx = 0,08 \frac{5^2 - 3^2}{2} = 0.64$$

$$(e) P[X \leq 3 | X > 1] = \frac{P[1 < X \leq 3]}{P[X > 1]} = \frac{\int_1^3 0,08x dx}{\int_1^5 0,08x dx} = \frac{0,08 \frac{3^2 - 1^2}{2}}{0,08 \frac{5^2 - 1^2}{2}} = 0.333$$

(f)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x 0,08x dx = 0,08 \frac{x^2 - 0^2}{2} = 0,04x^2 & 0 \leq x \leq 5 \\ 1 & x > 5 \end{cases}$$

$$P[1 \leq X \leq 3] = F(3) - F(1) = 0,04(3^2 - 1^2) = 0.32$$

$$P[2 \leq X \leq 4] = F(4) - F(2) = 0,04(4^2 - 2^2) = 0.48$$

$$P[X \geq 3] = 1 - F(3) = 1 - 0,04(3^2) = 0.64$$

$$P[X \leq 3 | X > 1] = \frac{F(3) - F(1)}{1 - F(1)} = \frac{0,04(3^2 - 1^2)}{1 - 0,04(3^2)} = 0.333$$

(g) $E[X] = \int x f(x) dx = \int_0^5 x 0,08x dx = 0,08 \frac{5^3 - 0^3}{3} = 10/3 = 3,33$

(h)

$$M_d[X] : \int_0^{M_d} f(x) dx = 0,5 \Rightarrow M_d[X] = F^{-1}(0,5) = \sqrt{0,5/0,04} = 3.54$$

$$Q_1[X] : \int_0^{Q_1} f(x) dx = 0,25 \Rightarrow Q_1[X] = F^{-1}(0,25) = \sqrt{0,25/0,04} = 2.5$$

$$Q_3[X] : \int_0^{Q_3} f(x) dx = 0,75 \Rightarrow Q_3[X] = F^{-1}(0,75) = \sqrt{0,75/0,04} = 4.33$$
