

# CE-003: Estatística II - Turma: MD, 1ª Prova (10/03/2014)

**GRR:** \_\_\_\_\_ **Nome:** \_\_\_\_\_ **Turma:** \_\_\_\_\_

1. Peças que saem de uma linha de produção são marcadas como defeituosas ( $D$ ) ou não defeituosas ( $N$ ). A proporção de peças defeituosas na linha de produção é denotada por  $p$ . Peças são inspecionadas e sua condição ( $D$  ou  $N$ ) é registrada. Isto é feito até que duas peças defeituosas consecutivas sejam fabricadas ou que quatro peças tenham sido inspecionadas, aquilo que ocorrer primeiro.
  - (a) Descreva o espaço amostral do experimento.
  - (b) Atribua probabilidades a cada ponto do espaço amostral.
  - (c) Qual (quais) a(s) suposição(ões) feita(s) no cálculo das probabilidades.
  - (d) Qual a probabilidade do evento *quatro peças são inspecionadas*.
  - (e) Qual a probabilidade do evento *quatro peças são inspecionadas sabendo-se que a primeira inspecionada era defeituosa*.

**Solução:**

(a)

$$\Omega = \{(D, D), (N, D, D), (D, N, D, D), (D, N, D, N), (D, N, N, D), (N, N, D, D), (N, D, N, D), (D, N, N, N), (N, D, N, N), (N, N, N, D), (N, N, D, N), (N, N, N, N)\}$$

(b)

$$\begin{aligned} \{(D, D)\} &: P = p^2 \\ \{(N, D, D)\} &: P = (1-p)p^2 \\ \{(D, N, D, D)\} &: P = (1-p)p^3 \\ \{(D, N, D, N), (D, N, N, D), (N, N, D, D), (N, D, N, D)\} &: P = (1-p)^2 p^2 \\ \{(D, N, N, N), (N, D, N, N), (N, N, N, D), (N, N, D, N)\} &: P = (1-p)^3 p \\ \{(N, N, N, N)\} &: P = (1-p)^4 \end{aligned}$$

(c) Independência, probabilidade  $p$  permanece constante.

(d)

$$\begin{aligned} &P[(D, N, D, D), (D, N, D, N), (D, N, N, D), (N, N, D, D), (N, D, N, D), \\ &(D, N, N, N), (N, D, N, N), (N, N, N, D), (N, N, D, N), (N, N, N, N)] = \\ &= (1-p)^1 * p^3 + 4 * (1-p)^2 * p^2 + 4 * (1-p)^3 * p + (1-p)^4 \end{aligned}$$

ou

$$P[(D, D), (N, D, D)] = 1 - p^2 - (1-p)p^2$$

(e)

$$P[(D, N, D, D), (D, N, D, N), (D, N, N, D), (D, N, N, N)] = (1-p)^1 * p^3 + 2 * (1-p)^2 + (1-p)^4$$

2. Três equipes,  $I$ ,  $II$  e  $III$ , vão ter jogos contra outros adversários em uma determinada rodada de um campeonato. Informações sobre as equipes e resultados anteriores mostram que a probabilidade de  $I$  vencer o seu jogo é de 0,7; enquanto que a probabilidade de  $II$  vencer seu jogo é de 0,5 e a de  $III$  é 0,9. Não há a possibilidade de empate nos jogos. Considere como independentes os resultados das três equipes na rodada e responda às questões a seguir.
  - (a) O resultado da rodada é um experimento aleatório? Porque?
  - (b) Qual o espaço amostral?
  - (c) Qual a probabilidade de alguma das equipes (ao menos uma) perder a sua partida?
  - (d) Sabendo-se que  $III$  venceu a partida, qual a probabilidade de que ambas as demais equipes tenham pedido?
  - (e) Os eventos  $I$  vence o jogo e  $II$  vence o jogo são mutuamente exclusivos? Justifique.

**Solução:**

Eventos :

I: equipe I vence a partida ;  $P[I] = 0,7$  ;  $P[\bar{I}] = 0,3$

II: equipe II vence a partida ;  $P[II] = 0,5$  ;  $P[\bar{II}] = 0,5$

III: equipe III vence a partida ;  $P[III] = 0,9$  ;  $P[\bar{III}] = 0,1$

(a) Sim, é possível dizer os resultados possíveis mas não o que vai acontecer

(b)  $\Omega = \{(I, II, III), (I, II, \bar{III}), (I, \bar{II}, III), (\bar{I}, II, III), (I, \bar{II}, \bar{III}), (\bar{I}, II, \bar{III}), (\bar{I}, \bar{II}, III), (\bar{I}, \bar{II}, \bar{III})\}$

Resultado	$(I, II, III)$	$(I, II, \bar{III})$	$(I, \bar{II}, III)$	$(\bar{I}, II, III)$
Probabilidade	$(0,7)(0,5)(0,9)$	$(0,7)(0,5)(0,1)$	$(0,7)(0,5)(0,9)$	$(0,3)(0,5)(0,9)$
Resultado	$(I, \bar{III}, III)$	$(\bar{I}, II, \bar{III})$	$(\bar{I}, \bar{II}, III)$	$(\bar{I}, \bar{II}, \bar{III})$
Probabilidade	$(0,7)(0,5)(0,1)$	$(0,3)(0,5)(0,1)$	$(0,3)(0,5)(0,9)$	$(0,3)(0,5)(0,1)$

(c)  $P[\text{alguma equipe perder}] = 1 - P[\text{todas ganharem}] = 1 - P[(I, II, III)] = 1 - (0,7)(0,5)(0,9) = 0,685$

(d)  $P[(\bar{I}, \bar{II}, III)|(*, *, III)] = \frac{P[(\bar{I}, \bar{II}, III)]}{P[(I, II, III), (I, \bar{II}, III), (\bar{I}, \bar{II}, III)]} = \frac{(0,3)(0,5)(0,9)}{(0,7)(0,5)(0,9) + (0,7)(0,5)(0,1) + (0,3)(0,5)(0,9) + (0,3)(0,5)(0,1)} = 0,15$

(e) Não, porque a interseção entre eles não é vazia, correspondendo aos seguintes eventos:

$$\{(I, II, III), (I, II, \bar{III})\}$$

3. Uma empresa adquire 30% de sua matéria prima de um primeiro fornecedor, 50% de um segundo e o restante de um terceiro fornecedor. Os lotes de matéria prima são inspecionados e, se considerados não satisfatórios, são enviados de volta. Sabe-se que 2%, 5% e 1% dos lotes são retornados a cada fornecedor, respectivamente. Calcule as probabilidades de um lote tomado ao acaso:

- (a) ser do fornecedor II e não retornar;
- (b) ser devolvido;
- (c) havendo sido rejeitado, ser do fornecedor II
- (d) havendo sido rejeitado, ser do fornecedor III
- (e) havendo sido aceito, ser do fornecedor I

**Solução:**

Eventos :

R: lote é devolvido

I: matéria prima vem do primeiro fornecedor

$$P[I] = 0,3 ; P[R|I] = 0,02$$

II: matéria prima vem do primeiro fornecedor

$$P[II] = 0,5 ; P[R|II] = 0,05$$

III: matéria prima vem do primeiro fornecedor

$$P[III] = 0,2 ; P[R|III] = 0,01$$

(a)  $P[II \cap \bar{R}] = P[\bar{R}|II] \cdot P[II] = 0,95 \cdot 0,5 = 0,475$

(b)  $P[R] = P[I \cap R] + P[II \cap R] + P[III \cap R] = P[R|I] \cdot P[I] + P[R|II] \cdot P[II] + P[R|III] \cdot P[III] = 0,02 \cdot 0,3 + 0,05 \cdot 0,5 + 0,01 \cdot 0,2 = 0,032$

(c)  $P[II|R] = \frac{P[II \cap R]}{P[R]} = \frac{P[R|II]P[II]}{P[R]} = \frac{0,05 \cdot 0,5}{0,032} = 0,78125$

(d)  $P[III|R] = \frac{P[III \cap R]}{P[R]} = \frac{P[R|III]P[III]}{P[R]} = \frac{0,01 \cdot 0,2}{0,032} = 0,0625$

(e)  $P[I|\bar{R}] = \frac{P[I \cap \bar{R}]}{P[\bar{R}]} = \frac{P[R|I]P[I]}{1 - P[R]} = \frac{0,02 \cdot 0,3}{1 - 0,032} = 0,0204$

4. Considere que um componente de um sistema de reconhecimento é composto de um código de três algarismos que podem ser fornecidos em qualquer ordem (podendo haver repetição de algarismos). O reconhecimento é positivo se ao menos dois algarismos corretos são fornecidos. São feitas tentativas aleatórias de reconhecimento escolhendo três algarismos (de 0 a 9) ao acaso.

- (a) Qual a probabilidade do reconhecimento ser positivo em uma tentativa qualquer?
- (b) Qual a probabilidade de conseguir reconhecimento positivo em duas tentativas consecutivas?
- (c) Qual a probabilidade de conseguir reconhecimento positivo em exatamente duas entre 10 tentativas?
- (d) Se são feitas tentativas até conseguir o primeiro reconhecimento positivo, qual a probabilidade de que sejam necessárias mais do que quatro tentativas?
- (e) Você consegue identificar distribuições de probabilidades discretas discutidas em aula os itens anteriores? Qual(ais)?

**Solução:**

O problema pode ser resolvido diretamente utilizando distribuições de probabilidades “conhecidas”, mas vamos aqui detalhar a solução.

Denotando por  $C$ : *algarismo correto é fornecido* e  $\bar{C}$ : *algarismo incorreto é fornecido*, o espaço amostral do experimento definido por uma tentativa é:

$$\Omega = \{(\bar{C}, \bar{C}, \bar{C}), (\bar{C}, \bar{C}, C), (\bar{C}, C, \bar{C}), (C, \bar{C}, \bar{C}), (\bar{C}, C, C), (C, \bar{C}, C), (C, C, \bar{C}), (C, C, C)\}.$$

As probabilidades associadas a cada ponto podem ser obtidas considerando que  $P[C] = 0,1$  e independência. Desta forma  $P[(\bar{C}, \bar{C}, C)] = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,1$  e de forma análoga para demais.

- (a)  $E_1$  : reconhecimento ser positivo em uma tentativa

$$pR = P[E_1] = P[(C, C, \bar{C})] + P[(C, \bar{C}, C)] + P[(\bar{C}, C, C)] + P[(C, C, C)] = 3 \cdot (0,1)^2(0,9) + (0,1)^3 = 0,028$$

- (b)

$$P[E_1 \cap E_1] \stackrel{ind}{=} 0,01^2 = 0,000784$$

- (c)  $E_3$ : reconhecimento positivo em exatamente duas entre 10 tentativas

$$P[E_3] = \binom{10}{2} (pR)^2 (1 - pR)^{10-2} = 0,02811$$

- (d)  $E_4$ : mais do que quatro tentativas até primeiro reconhecimento positivo.

$$P[E_3] = 1 - P[\bar{E}_3] = 1 - (pR + (1 - pR)pR + (1 - pR)^2 pR + (1 - pR)^3 pR) = 0,89262$$

- (e) Distribuição Binomial para (i) número de algarismos corretos (ii) número de tentativas positivas. Distribuição Geométrica para número de tentativas até o primeiro reconhecimento.

Utilizando distribuições de probabilidades “conhecidas” teríamos as soluções apresentadas a seguir. Definindo as variáveis aleatórias:

$X_1$ : número de algarismos corretos em uma tentativa	$X_1 \sim B(n = 3, p = 1/10)$
$X_2$ : número de tentativas corretas em 2 tentativas	$X_2 \sim B(n = 2, p = P[X_1 \geq 2])$
$X_3$ : número de tentativas corretas em 10 tentativas	$X_3 \sim (n = 2, p = P[X_1 \geq 2])$
$X_4$ : número de não reconhecimentos até o primeiro positivo	$X_4 \sim G(p = P[X_1 \geq 2])$

E os itens anteriores seriam respondidos como:

- (a)  $P[X_1 \geq 2] = P[X_1 = 2] + P[X_1 = 3] = 0,027 + 0,001 = 0,028$
  - (b)  $P[X_2 = 2] = 0,000784$
  - (c)  $P[X_3 = 2] = 0,02811$
  - (d)  $P[X_4 \geq 4] = 1 - P[X \leq 3] = 1 - 0,10738 = 0,89262$
-